Matematica III

Docente: Giulio Galise
CdL in Statistica, Economia, Finanza e Assicurazioni, A.A. 2021/2022

Esercitazione 8

Esercizio 1. Calcolare
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$
nei seguenti casi:

(a) $f(x,y)=y^2\,,\qquad D=\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,1\le x^2+y^2\le 4\,,\ \frac{\sqrt{3}}{3}x\le y\le\sqrt{3}x\Big\}$

(b) $f(x,y)=\dfrac{x^2+xy^2}{y^3}\,,\qquad D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2\le y\le 2x^2\,,\ x\le y\le 2x\big\}$

(c) $f(x,y)=\dfrac{x\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}{y^2}\,,\qquad D$ è l'intersezione della corona circolare di centro l'origine e raggi $r=\pi$ e $R=2\pi$ con l'insieme $\{-y\le x\le 0\}$

(d) $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\,,\qquad D=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x^2+y^2\le 1\,,\ x+y\ge 1\big\}$.

Esercizio 2. Calcolare
$$\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-x^2-y^2}\,dy\,.$$

Esercizio 3. Sia $f\in C^0(D)$ con $D\subset\mathbb{R}^2$ chiuso, misurabile, limitato e simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che
$$(x,y)\in D\Longleftrightarrow(-x,-y)\in D\,.$$
Provare i seguenti fatti:

(i) se $f(-x,-y)=-f(x,y)$ per ogni $(x,y)\in D$ allora $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy=0$;

(ii) se $f(-x,-y)=f(x,y)$ per ogni $(x,y)\in D$ allora
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=2\iint_{D_1^+} f(x,y)\,dxdy=2\iint_{D_2^+} f(x,y)\,dxdy$$
dove $D_1^+=\{(x,y)\in D:\ x\ge 0\}$ e $D_2^+=\{(x,y)\in D:\ y\ge 0\}$.

Stabilire formule analoghe alle (i)-(ii) nei casi

- D simmetrico rispetto all'asse y, cioè $(x,y) \in D \iff (-x,y) \in D$
- D simmetrico rispetto all'asse x, cioè $(x,y) \in D \iff (x,-y) \in D$.

Usare quanto appena dimostrato per il calcolo dei seguenti integrali:

$$(1) \quad \iint_{x^2+y^2\leq 1} 1 + \sin^{101}(x+y)\, dxdy$$

$$(2) \quad \iint_D x + \cos(x^2+y^2)\, dxdy\ , \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4\, ,\ |y| \leq |x|\right\}.$$

Esercizio 4. Usando gli integrali doppi provare che il volume della sfera $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$, con $R > 0$, è $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Esercizio 5. Calcolare, al variare di $\alpha > 0$, l'integrale generalizzato

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}\, dxdy$$

Esercizio 6. Sia $f \in C^0([1,+\infty))$ tale che $f \geq 0$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(u)\, du = 1$. Calcolare l'integrale generalizzato

$$\iint_D f(xy)\, dxdy$$

essendo $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ \ x \leq y \leq 4x\ ,\ y \geq \frac{1}{x}\right\}$.
(*Suggerimento: usare* $D_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ \ x \leq y \leq 4x\, ,\ \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{n}{x}\right\}$ *come successione invadente*)